

令和 3 年度入学者選抜学力検査問題(前期日程)

数 学

I ・ II ・ III ・ A ・ B

(医学部医学科)

(注 意)

1. 問題冊子は指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は 4 ページ，解答用紙は 4 枚である。
指示があってから確認すること。
3. 解答はすべて解答用紙の指定のところに記入すること。
解答用紙の表面だけで書ききれない場合は，裏面の下半分
を使用することができる。
4. 解答用紙は持ち帰ってはならないが，問題冊子は必ず持ち
帰ること。

〔I〕 0以上の整数 n を2進法で表したときに 2^0 の位の値, 2^1 の位の値, ……,
 $2^{D(n)-1}$ の位の値をそれぞれ $b_1, b_2, \dots, b_{D(n)}$ とする。ただし, $D(n)$ は n を
2進法で表したときの桁数である。このとき

$$a_n = b_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + b_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + b_{D(n)} \left(\frac{1}{2}\right)^{D(n)}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。例えば,

$n = 0$ のとき 2進法では0のため

$$a_0 = 0$$

$n = 1$ のとき 2進法では1のため

$$a_1 = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$n = 2$ のとき 2進法では10のため

$$a_2 = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$n = 3$ のとき 2進法では11のため

$$a_3 = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$n = 4$ のとき 2進法では100のため

$$a_4 = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

となる。以下の問いに答えよ。

(1) $2^k \leq n < 2^{k+1}$ (ただし k は自然数) のとき, a_n を a_{n-2^k} を用いて表せ。

(2) a_0 から a_{130} までの数列の和 $S_{130} = \sum_{i=0}^{130} a_i$ を求めよ。

(3) k を2以上の自然数とすると, $a_n < \frac{1}{4}$ ($0 \leq n \leq 2^k$) となる項の数を求めよ。

〔Ⅱ〕 複素数 ω , z が $|\omega| = \sqrt{3}$, $z = \frac{\omega}{\omega + 1}$ を満たすとする。複素数平面上の点 $A(\omega)$, $B(z)$, 原点 O に対し, S を, この 3 点が一直線上にないときは $\triangle OAB$ の面積とし, 一直線上にあるときは 0 と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) S を ω , $\bar{\omega}$ を用いて表せ。ただし, $\bar{\omega}$ は ω の共役複素数である。
- (2) S の最大値を求めよ。また, このとき $\triangle OAB$ はどのような三角形か。

〔Ⅲ〕 A は $A > 1$ を満たす実数とする。 $A \leq a \leq A + 1$ を満たす実数 a に対し、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a^x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

とし、 xy 平面上の曲線 C を

$$C: y = f(x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (2) a が $A \leq a \leq A + 1$ の範囲を動くとき、曲線 C が通過する領域の面積 $S(A)$ を A を用いて表せ。
- (3) (2) で定めた $S(A)$ に関する次の極限

$$\lim_{A \rightarrow \infty} S(A) \log A$$

を求めよ。ただし、

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{A} \right)^A = 1$$

であることを用いてよい。

[IV] p は $0 < p \leq 1$ を満たす実数とする。0 以上の整数 n に対して

$$J_n = \int_0^p \frac{1 - (-1)^n x^{2n}}{1 + x^2} dx$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 m に対して、定積分 $\int_0^p \frac{x^m}{1 + x^2} dx$ と $\frac{1}{m + 1}$ の大小関係を調べよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{p^{2n-1}}{2n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を J_n を用いて表せ。

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$ の和を求めよ。